

Capitolo 2

Lezione 2

Definiamo **titolo derivato** (di tipo europeo) una variabile aleatoria della forma $H(S_1)$. Questo sarà il pagamento a cui avremo diritto al tempo 1, in funzione del valore del titolo rischioso S . Esempi di titoli derivati sono le call e le put dell'Esempio 1.2, dove la funzione H è data rispettivamente da

$$H(s) := (s - K)^+ \text{ (call)}, \quad H(s) := (K - s)^+ \text{ (put)}$$

Come già detto, per un dato titolo derivato X i problemi che vogliamo risolvere sono due:

1. **prezzaggio:** trovare un (o addirittura il) prezzo equo per X ; in particolare chiamiamo $\Pi(n; X)$ il prezzo di mercato di X al tempo $n = 0, 1$;
2. **copertura:** trovare un portafoglio $h = (x, y)$ che elimini il rischio derivante dal titolo X .

La seguente definizione affronta entrambi i problemi: diciamo che un titolo derivato X è **raggiungibile** se esiste un portafoglio $h = (x, y)$ tale che $\mathbb{P}\{V_1^h = X\} = 1$ (cioè l'uguaglianza $V_1^h = X$ deve valere su tutti i possibili stati di natura). In questo caso diciamo che h **replica** (perfettamente) X , o anche che è un **portafoglio di copertura** per X . Un mercato in cui ogni titolo X può essere replicato si dice **completo**.

Nel seguito faremo sempre l'ipotesi (implicita in ogni enunciato) che sul mercato non siano possibili arbitraggi.

Proposizione 2.1 *Se X è un titolo derivato raggiungibile, allora il prezzo di mercato X è dato da*

$$\Pi(n; X) = V_n^h \quad n = 0, 1$$

Dimostrazione. Partiamo da $n = 1$: per definizione di titolo raggiungibile, la tesi equivale a $\Pi(1; X) = V_1^h = X$. È intuitivo che questa relazione deve valere in ogni stato di natura.

Passiamo ora a dimostrare la tesi per $n = 0$. Chiamiamo $\Pi(0; X) - V_0^h =: \delta$ (dove $h = (x, y)$ replica X), e supponiamo che $\delta > 0$: questo porta ad un arbitraggio, che può

essere facilmente costruito vendendo il titolo X e comprando il portafoglio $\tilde{h} := (x + \frac{\delta}{B_0}, y)$. Allora, ricordando che h replica X , abbiamo

$$\begin{aligned} V_0^{\tilde{h}} &= \left(x + \frac{\delta}{B_0}\right) B_0 + yS_0 - \Pi(0; X) = xB_0 + \delta + yS_0 - \delta + V_0^h = 0, \\ V_1^{\tilde{h}} &= \left(x + \frac{\delta}{B_0}\right) B_0(1+r) + yS_1 - \Pi(1; X) = xB_1 + \delta(1+r) + yS_1 - X = \\ &= V_1^h + \delta(1+r) - X = \delta(1+r) > 0 \end{aligned}$$

Siccome non ci possono essere arbitraggi nel mercato, la relazione $\delta > 0$ non può valere. Allo stesso modo, se $\delta < 0$, riusciamo a dimostrare che comprare il titolo X e il portafoglio $-\tilde{h}$ è un arbitraggio. Deve quindi valere $\delta = 0$, che completa la tesi. \square

Dunque, se un titolo è raggiungibile abbiamo una regola costruttiva per il prezzo. Vediamo ora che, nell'esempio del modello binomiale, questo vale per ogni possibile titolo derivato X .

Proposizione 2.2 *In un modello binomiale, ogni titolo derivato X è raggiungibile.*

Dimostrazione. Prendiamo un titolo derivato, che sarà quindi della forma $X = H(S_1)$; per dimostrare la tesi dobbiamo trovare un portafoglio $h = (x, y)$ tale che $V_1^h = H(S_1)$ con probabilità 1, cioè dobbiamo imporre che sui due eventi $\{\xi_1 = u\}$ (che si verifica con probabilità p) e $\{\xi_1 = d\}$ (che si verifica con probabilità $1 - p$) si abbia $V_1^h = H(S_1)$: chiaramente sia V_1^h che $H(S_1)$ sono variabili aleatorie che dipendono da ξ_1 , e quindi questo porta alle due equazioni

$$\begin{cases} xB_1 + yS_0(1+u) = H(S_0(1+u)), \\ xB_1 + yS_0(1+d) = H(S_0(1+d)), \end{cases}$$

che devono valere simultaneamente. È facile mostrare che l'unica soluzione del sistema sopra è

$$\begin{cases} x = \frac{(1+u)H(S_0(1+d)) - (1+d)H(S_0(1+u))}{B_1(u-d)}, \\ y = \frac{H(S_0(1+u)) - H(S_0(1+d))}{S_0(u-d)} = \frac{H(S_0(1+u)) - H(S_0(1+d))}{S_0(1+u) - S_0(1+d)}, \end{cases} \quad (2.1)$$

Con questa scelta di $h = (x, y)$ riusciamo a replicare il titolo X . \square

Di conseguenza, il prezzo del titolo derivato X sarà

$$\Pi(0; X) = V_0^h = xB_0 + yS_0 \quad (2.2)$$

con gli (x, y) dell'Equazione (2.1). Il teorema sopra ci dice anche che il mercato binomiale è completo: ogni titolo derivato può essere replicato perfettamente.

2.1 Esercitazione

Aprire un foglio OpenOffice ed implementare l'algoritmo di prezzaggio visto sopra per una opzione call.

Più in dettaglio:

- aprire un foglio di calcolo su OpenOffice e riportare nella prima colonna le etichette S_0 , u , d , K , e nella seconda colonna valori corrispondenti (es. 100, 0.05, 0.1, -0.1 , 105);
- su una nuova riga, incasellare Tempo, 0, 1;
- costruire sotto l'albero per S : nella seconda colonna copiare il valore di S_0 e nella terza colonna calcolare $S_0 * (1 + u)$ e nella casella sotto $S_0 * (1 + d)$;
- costruire sotto l'ultima riga dell'albero per la call: nella riga del tempo 1 costruire il payoff della call $\max(S_1 - K, 0)$, dove i valori di S_1 si prendono dall'albero di S , e quello di K dalla casella corrispondente;
- nelle righe sotto, impostare le caselle $x =$ e $y =$, mettendo nelle caselle a fianco le formule (2.1);
- nella casella vuota dell'albero della call (quella per il tempo 0), inserire il prezzo (2.2).