# Capitolo 3

# Lezione 3

## 3.1 Interpretazione probabilistica del prezzo

Nella scorsa lezione abbiamo visto un modo operativo per trovare il prezzo di un qualunque titolo derivato $X = H(S_1)$ nel modello binomiale. Difatti, sostituendo in (2.2) il portafoglio di copertura trovato in (2.1), dopo alcuni passaggi algebrici otteniamo

$$\begin{aligned}\Pi(0;X) &= V_0^h = xB_0 + yS_0 = \\ &= \frac{(1+u)H(S_0(1+d)) - (1+d)H(S_0(1+u))}{B_0(1+r)(u-d)} \cdot B_0 + \frac{H(S_0(1+u)) - H(S_0(1+d))}{S_0(u-d)} \cdot S_0 = \\ &= \frac{1}{1+r}\left[\frac{r-d}{u-d}H(S_0(1+u)) + \frac{u-r}{u-d}H(S_0(1+d))\right]\end{aligned}$$

Notiamo innanzitutto che sia naturale che ci sia un fattore $1+r$: difatti la formula permette di passare da importi al tempo 0 (il prezzo del derivato) ad importi al tempo 1 (i valori che il derivato può assumere). Notiamo poi che il prezzo si può esprimere come media pesata dei diversi valori che il titolo derivato può assumere: media pesata in quanto, se poniamo $q := \frac{r-d}{u-d}$, possiamo scrivere

$$\Pi(0;X) = \frac{1}{1+r}\left[qH(S_0(1+u)) + (1-q)H(S_0(1+d))\right] \tag{3.1}$$

e il numero $q$ è compreso tra 0 e 1: ricordiamo infatti che $d \leq r \leq u$. Se leggiamo questa relazione in modo geometrico (più precisamente con il linguaggio della geometria analitica), dire che il punto $r$ è compreso tra i punti $d$ ed $u$ significa che esiste $\lambda \in [0,1]$ tale che $r = \lambda u + (1-\lambda)d$, e questo $\lambda$ vale esattamente $\lambda = \frac{r-d}{u-d} = q$: quindi questo numero $q$ è profondamente legato al non arbitraggio.

Poichè $q \in [0,1]$, potremmo interpretarlo come una probabilità: più precisamente, definiamo la nuova probabilità $\mathbb{Q}$ in questo modo:

$$\mathbb{Q}\{\xi_1 = u\} = q, \qquad \mathbb{Q}\{\xi_1 = d\} = 1-q$$

in alternativa alla probabilità $\mathbb{P}$ che finora abbiamo usato. Se ora calcoliamo il valore medio (detto anche **speranza matematica**) della variabile aleatoria $S_1$ sotto queste due probabilità[1], otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1] &= S_0(1+u)\mathbb{Q}\{\xi_1 = u\} + S_0(1+d)\mathbb{Q}\{\xi_1 = d\} = S_0(1+u)q + S_0(1+d)(1-q) = \\
&= S_0[q + 1 - q + uq + d(1-q)] = S_0[1+r] \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

quindi, se la probabilità fosse $\mathbb{Q}$, il rendimento del titolo rischioso $S$ sarebbe uguale al rendimento del titolo senza rischio $B$; ricordiamo però che nel mondo reale il rendimento di $S$ è

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S_1] = S_0(1+u)\mathbb{P}\{\xi_1 = u\} + S_0(1+d)\mathbb{P}\{\xi_1 = d\} = S_0(1+u)p + S_0(1+d)(1-p)$$

che non sappiamo a priori se sia maggiore o minore di $S_0(1+r)$. La nuova probabilità $\mathbb{Q}$ si può quindi interpretare come una probabilità fittizia sotto cui prezzare i titoli derivati: possiamo infatti scrivere

$$\begin{aligned}
\Pi(0; X) &= \frac{1}{1+r}\left[H(S_0(1+u))\mathbb{Q}\{\xi_1 = u\} + H(S_0(1+d))\mathbb{Q}\{\xi_1 = d\}\right] = \\
&= \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H(S_1)] = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X]
\end{aligned}$$

La probabilità $\mathbb{Q}$ è nota con due nomi. Il primo è quello di **probabilità neutra al rischio**, poichè sotto di essa tutti i titoli, senza distinzione tra senza rischio e rischiosi, hanno lo stesso rendimento medio $r$, come si vede da (3.2). Per il secondo nome, introduciamo il **prezzo scontato** di $S$ come

$$\tilde{S}_n := \frac{S_n}{B_n}, \qquad n \geq 0$$

che esprime il prezzo di $S$ in unità monetarie del tempo 0. Ovviamente $\tilde{S}_1$ è una variabile aleatoria, di cui possiamo calcolare la speranza sotto $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_1] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\frac{S_1}{B_1}] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1]}{B_1} = \frac{S_0(1+r)}{B_0(1+r)} = \frac{S_0}{B_0} = \tilde{S}_0$$

quindi la media di $\tilde{S}_1$ sotto $\mathbb{Q}$ è $\tilde{S}_0$: in matematica si dice allora che $S$ è una **martingala**: per questo motivo $\mathbb{Q}$ si indica anche con il nome di **probabilità martingala (equivalente)**.

[1] Ricordiamo che, se $Y$ è una variabile aleatoria a valori nell'insieme $E$, il valore medio di $Y$ rispetto a una probabilità $\mathbb{P}$ è definito come

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y] = \sum_{x \in E} x\mathbb{P}\{Y = x\}$$

Se poi si compone $Y$ con una funzione $g(Y)$, anche questa è una variabile aleatoria, e la sua media può essere calcolata tramite la relazione

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g(Y)] = \sum_{x \in E} g(x)\mathbb{P}\{Y = x\}$$

Negli esempi sopra, abbiamo $S_1 = S_0(1+\xi_1)$, quindi

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S_1] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S_0(1+\xi_1)] = S_0(1+u)\mathbb{P}\{\xi_1 = u\} + S_0(1+d)\mathbb{P}\{\xi_1 = d\}$$

e in modo analogo per quanto riguarda $\mathbb{Q}$.

## 3.2 Esercitazione

Aprire il foglio OpenOffice della Lezione 2 ed implementare la formula di prezzaggio visto sopra con $\mathbb{Q}$ per una opzione call.

Più in dettaglio:

- di fianco alle caselle $S_0$, $u$, $d$, $K$ coi valori corrispondenti, calcolare $q$;
- sotto le righe degli alberi per $x$ e $y$, impostare un albero mettendo come etichetta prezzo neutro al rischio, mettendo nelle caselle a fianco la formula (3.1);
- confrontare il prezzo ottenuto con il prezzo ottenuto nella Lezione 2 (più su nel foglio di calcolo).

## 3.3 Modelli multiperiodali

Vedremo ora come si può formulare un modello binomiale con più di due periodi. Ricordiamo che le evoluzioni del titolo senza rischio $B$ e del titolo rischioso $S$ sono in generale

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= B_n(1+r), \\ S_{n+1} &= S_n(1+\xi_{n+1}), \end{aligned}$$

per $n = 0, \ldots, N-1$ e dove

$$p := \mathbb{P}\{\xi_n = u\}, \qquad 1-p := \mathbb{P}\{\xi_n = d\} \qquad \forall n > 0$$

Supponiamo sempre di poter investire solo nei titoli primari $B$ (titolo senza rischio) ed $S$ (titolo rischioso), e di poter operare in ogni istante $n = 0, \ldots, N-1$. In particolare supponiamo di comprare, al tempo $n$, un numero $x_{n+1}$ di titoli senza rischio $B$ ed un numero $y_{n+1}$ di titoli rischiosi $S$, che terremo nell'intervallo di tempo $(n, n+1]$. Definiamo quindi **portafogli** la successione di vettori $h := (h_n)_{n=0,\ldots,N-1}$, dove i singoli vettori $h_n = (x_n, y_n)$ possono stavolta essere variabili aleatorie, ma in quanto tali possono essere funzioni solo di quantità osservate fino al tempo $n-1$, cioè solo di $S_0, \ldots, S_{n-1}$: questa è una traduzione matematica del fatto che i nostri investitori non possono prevedere il futuro.[2] Definiamo poi **valore del portafogli** al tempo $n$ il totale del denaro da noi investito

$$V_n^h := x_{n+1}B_n + y_{n+1}S_n$$

Un'ipotesi che comunemente si fa quando si vogliono usare portafogli per valutare titoli derivati è che il portafogli sia **autofinanziante**, cioè che non si metta nè tolga denaro da esso nei tempi intermedi: tutte le transazioni nei titoli $B$ ed $S$ devono quindi usare tutto e solo il valore del portafogli all'istante della transazione. Questo si traduce imponendo che

$$x_nB_n + y_nS_n = x_{n+1}B_n + y_{n+1}S_n, \qquad n = 1, \ldots, N-1$$

[2]Formulare modelli in cui le $h_n$ possono essere anche funzione di $S_n, \ldots, S_N$ significa modellizzare un investitore che ha informazioni riservate sul comportamento del titolo nel futuro, informazioni che non sono a disposizione del resto del mercato: l'investimento risultante ha il nome tecnico di **insider trading**, ed è un reato penale in praticamente tutti i Paesi del mondo!

Come nel caso uniperiodale, diamo la definizione di arbitraggio, che sarà però leggermente più debole.

**Definizione 3.1** *Un portafogli $h$ si dice* **arbitraggio** *se:*

1. $V_0^h = 0$,
2. $\mathbb{P}\{V_N^h \geq 0\} = 1$,
3. $\mathbb{P}\{V_N^h > 0\} > 0$.

La definizione è più debole del caso uniperiodale in quanto qui si ammette che ci siano degli stati di natura in cui si finisce come si era partiti, cioè con un portafoglio che vale 0: la probabilità di guadagnare qualcosa dal nulla, però, rimane positiva. Come nel caso uniperiodale, un modello di mercato finanziario di solito si considera buono se non ammette la possibilità di arbitraggi al suo interno. Vediamo cosa questo significa nell'esempio del modello binomiale multiperiodale.

**Proposizione 3.2** *Nel modello binomiale non ci sono arbitraggi se e solo se $d < r < u$.*

Notiamo che, a differenza del caso uniperiodale, qui le disuguaglianze sono strette: questo è dovuto alla diversa definizione che abbiamo dato di arbitraggio. La dimostrazione di questa proposizione è analoga al caso uniperiodale e viene quindi omessa.

Come nel caso uniperiodale, definiamo **titolo derivato** (di tipo europeo) una variabile aleatoria della forma $H(S_N)$. Questo sarà il pagamento a cui avremo diritto al tempo $N$, in funzione del valore del titolo rischioso $S$.

Diciamo che un titolo derivato $X$ è **raggiungibile** se esiste un portafoglio $h$ tale che $\mathbb{P}\{V_N^h = X\} = 1$ (cioè l'uguaglianza $V_N^h = X$ deve valere su tutti i possibili stati di natura). In questo caso diciamo che $h$ **replica** (perfettamente) $X$, o anche che è un **portafoglio di copertura** per $X$. Un mercato in cui ogni titolo $X$ può essere replicato si dice **completo**.

Nel seguito faremo sempre l'ipotesi (implicita in ogni enunciato) che sul mercato non siano possibili arbitraggi.

**Proposizione 3.3** *Se $X$ è un titolo derivato raggiungibile, allora il prezzo di mercato $X$ è dato da*

$$\Pi(n; X) = V_n^h \quad n = 0, \dots, N$$

La dimostrazione di questa proposizione è simile all'analogo risultato del caso uniperiodale: se in un nodo dell'albero (corrispondente ad un tempo $n$ e ad uno stato particolare di $S_n$) questa relazione non valesse, si potrebbe costruire un arbitraggio tramite una strategia $\tilde{h}$ nulla fino a $n-1$ e nei nodi diversi da quello, e che sfrutti la differenza di prezzo generando un profitto certo in quel particolare nodo: siccome il fatto che la relazione non vale in un nodo consente di costruire un arbitraggio, si raggiunge un assurdo, e quindi resta così dimostrato che la relazione deve valere in ogni nodo.