

Capitolo 1

Lezione 1

1.1 Introduzione

Iniziamo descrivendo le diverse tipologie di titoli che comunemente si incontrano sui mercati finanziari; questa suddivisione non ha la pretesa di essere rigorosa, ma dà un'idea di che modelli si usano tipicamente.

Possiamo suddividere i titoli finanziari in queste classi:

- titoli **senza rischio**, o **obbligazione** (*bond* in inglese): un titolo viene considerato senza rischio se, nel momento in cui si compra, si sa con certezza a quale prezzo si riuscirà a venderlo nel futuro; tipicamente questo prezzo è maggiore del prezzo di acquisto, cioè il titolo produce un interesse. Esempi di questo tipo di titoli nel mercato italiano sono i BOT.
- titoli **rischiosi**, o **azioni** (*stock* in inglese): in questo caso nel momento in cui si compra il titolo tipicamente si ha incertezza sul valore futuro che sarà assunto da questo; tipicamente quindi l'evoluzione del suo prezzo sarà modellizzata attraverso l'uso del calcolo delle probabilità. Esempi di questo tipo di titoli nel mercato italiano sono tutte le azioni trattate in borsa: FIAT, ENI, Luxottica, ecc.
- titoli **derivati**: questo tipo di titoli hanno di solito una scadenza, o maturità, in cui il loro valore viene determinato in dipendenza da un titolo sottostante, detto **primario** (che tipicamente è un titolo rischioso, ma può anche essere altro, come un indice o un tasso di interesse). Tipici esempi di questo tipo di titoli nel mercato italiano sono i futures sul MIB30.

Vediamo ora alcuni esempi.

Esempio 1.1 (modello binomiale di Cox-Ross-Rubinstein) *Supponiamo di modellizzare l'evoluzione dei prezzi a tempo discreto: possiamo quindi osservare i prezzi (e investire) nei tempi $n = 0, 1, 2, \dots$. La tipica evoluzione di un titolo senza rischio è allora data dalla relazione ricorsiva*

$$\begin{cases} B_0 & = & 1, \\ B_{n+1} & = & B_n(1+r), \quad n \geq 0 \end{cases}$$

dove $r > 0$ è il tasso di interesse senza rischio per il periodo unitario, che per semplicità supponiamo costante. La tipica evoluzione per un titolo rischioso è invece data da

$$\begin{cases} S_0 &= s_0 > 0, \\ S_{n+1} &= S_n(1 + \xi_{n+1}), \quad n \geq 0 \end{cases}$$

dove le $(\xi_n)_{n \geq 0}$ sono cosiddette **variabili aleatorie**, cioè quantità il cui valore può variare a seconda del caso e che sono modellizzate attraverso probabilità. Nel modello binomiale si suppone che queste variabili siano indipendenti fra di loro e possano assumere solo due valori u ($= up$) e d ($= down$), con $-1 < d < 0 < u$ e con probabilità

$$p := \mathbb{P}\{\xi_n = u\}, \quad 1 - p := \mathbb{P}\{\xi_n = d\} \quad \forall n > 0$$

dove $\mathbb{P}(A)$ significa la probabilità che l'evento A si verifichi. La probabilità con cui evolve S rimane quindi determinata dai parametri u , d e p : se quindi variamo uno di questi parametri (ad esempio p), significa che stiamo usando non più \mathbb{P} ma un'altra probabilità, che potremmo chiamare ad esempio $\tilde{\mathbb{P}}$.

Esempio 1.2 (opzioni call e put) L'esempio più comune di titolo derivato è quello delle opzioni call e put. Una **opzione call** su una azione S (es. FIAT) dà al possessore il diritto (ma non l'obbligo) di comprare 1 azione al **prezzo di esercizio** K alla **maturità** N . Questo significa che all'istante N il possedere una call dà il seguente effetto monetario:

- se $S_N < K$, non conviene esercitare l'opzione, quindi l'effetto è 0;
- se $S_N \geq K$, conviene esercitare l'opzione comprando il titolo al prezzo K e rivenderlo subito dopo al prezzo S_N , guadagnando così $S_N - K$.

Quindi all'istante N l'opzione darà un guadagno netto pari a $\max(S_N - K, 0) =: (S_N - K)^+$.

Una **opzione put** è definita in modo analogo ma dà il diritto di vendere invece che di comprare. Invertendo il ragionamento, il suo guadagno netto al tempo N sarà di $\max(K - S_N, 0) =: (K - S_N)^+$.

Il fatto di detenere un titolo derivato come quelli dell'Esempio 1.2 fa sì che nel futuro si abbia un guadagno senza possibilità di perdita. Un tale titolo sul mercato ovviamente non si trova gratis, e quindi un primo problema che ci si pone è quello di quale sia un prezzo equo per questo titolo: questo problema è detto **prezzaggio**. Inoltre, dato che il suo valore futuro è in qualche modo legato al sottostante S , una richiesta naturale è quella se ci sia una strategia di investimento in S ed eventualmente nel titolo non rischioso tale da minimizzare il rischio generato dal titolo derivato: questo problema è detto **copertura**.

1.2 Portafogli e arbitraggio

Per rispondere ai due problemi citati sopra, un primo passo è quello di definire cosa intendiamo come strategia di investimento.

Supponiamo per ora di poter investire solo nei titoli primari B (titolo senza rischio) ed S (titolo rischioso), e di poter operare solo negli istanti 0 ed 1. Supponiamo di comprare,

al tempo $n = 0$, un numero x di titoli senza rischio B ed un numero y di titoli rischiosi S . Definiamo **portafogli** il vettore $h := (x, y)$ e **valore del portafogli** il totale del denaro da noi investito

$$V_0^h := xB_0 + yS_0$$

Per capire come possiamo prendere h e come evolve il valore del nostro portafogli, sul nostro mercato facciamo le seguenti

Ipotesi 1.3 *Supponiamo che valgano le seguenti ipotesi sul mercato:*

- sono permesse posizioni di ogni tipo $h = (x, y) \in \mathbb{R}^2$; in particolare, sono permesse posizioni **frazionate** ($x, y \notin \mathbb{Z}$, cioè si possono comprare quantità non intere di titoli) e **corte** ($x, y < 0$): il caso $x < 0$ corrisponde a prendere dei soldi in prestito, mentre il caso $y < 0$ corrisponde alla cosiddetta **vendita allo scoperto**, cioè a vendere un titolo senza possederlo fisicamente (ma avendone finanziariamente le conseguenze);
- non ci sono cosiddetti **bid-ask spread**, cioè intervalli tra prezzo di acquisto e prezzo di vendita, che sono quindi uguali in ogni periodo: di conseguenza non ci sono costi per le transazioni.

Con queste ipotesi, il valore del portafoglio in $n = 1$ viene ad essere

$$V_n^h := xB_n + yS_n, \quad n = 0, 1$$

L'interpretazione è che al tempo 0 investiamo nel portafoglio $h = (x, y)$ e al tempo 1, coi nuovi prezzi B_1 ed S_1 il portafoglio assume il nuovo valore $V_1^h = xB_1 + yS_1$, che è a nostra disposizione.

In un buon modello non dovrebbe essere possibile creare soldi dal nulla, cioè creare un portafogli che dia guadagni sicuri senza perdite. Difatti, se questo fosse possibile, tutti vorrebbero comprare un tale portafogli e di conseguenza non ci sarebbe nessuno che vendererebbe (e quindi questo non sarebbe possibile). La formalizzazione matematica di questo concetto è la seguente.

Definizione 1.4 *Un portafogli $h = (x, y)$ si dice **arbitraggio** se:*

1. $V_0^h = 0$,
2. $V_1^h > 0$, o più precisamente $\mathbb{P}\{V_1^h > 0\} = 1$.

Un modello di mercato finanziario di solito si considera buono se non ammette la possibilità di arbitraggi al suo interno. Vediamo cosa questo significa nell'esempio del modello binomiale.

Proposizione 1.5 *Nel modello binomiale non ci sono arbitraggi se e solo se $d \leq r \leq u$.*

Dimostrazione. Iniziamo dimostrando che se non ci sono arbitraggi allora deve valere la doppia disuguaglianza. Difatti, se per assurdo avessimo $r < d \leq u$, allora costruiamo la strategia $h := (-\frac{S_0}{B_0}, 1)$. Allora:

$$\begin{aligned} V_0^h &= -\frac{S_0}{B_0} \cdot B_0 + 1 \cdot S_0 = 0, \\ V_1^h &= -\frac{S_0}{B_0} \cdot B_0(1+r) + 1 \cdot S_0(1+\xi_1) = S_0(\xi_1 - r) \end{aligned}$$

Ma la variabile aleatoria V_1^h vale $S_0(u-r) > 0$ con probabilità p e $S_0(d-r) > 0$ con probabilità $1-p$, ed abbiamo quindi $\mathbb{P}\{V_1^h > 0\} = 1$, quindi h è un arbitraggio, cosa che va contro le nostre ipotesi: quindi $d > r$ non può essere vera, e deve essere $d \leq r$. Per dimostrare che deve valere anche $r \leq u$, si procede analogamente: se fosse $r > u$, allora il portafoglio $h := (\frac{S_0}{B_0}, -1)$ sarebbe un arbitraggio (verificare per esercizio) e quindi avremmo una contraddizione.

Dimostriamo ora che se $d \leq r \leq u$ allora non possiamo costruire arbitraggi. Difatti per avere un arbitraggio $h = (x, y)$ dobbiamo imporre

$$0 = V_0^h = xB_0 + yS_0$$

e quindi $x = -y\frac{S_0}{B_0}$. Allora

$$V_1^h = -y\frac{S_0}{B_0} \cdot B_0(1+r) + y \cdot S_0(1+\xi_1) = yS_0(\xi_1 - r)$$

Ora, y definisce un arbitraggio se e solo se $\mathbb{P}\{V_1^h > 0\} = 1$, cosa che non è possibile. Difatti $S_0 > 0$ sempre, e quindi se $y > 0$ abbiamo un arbitraggio se e solo se si verificano contemporaneamente

$$u - r > 0 \quad \text{e} \quad d - r > 0$$

ma questo è contro l'ipotesi $d \leq r \leq u$, e quindi non possono esserci arbitraggi $h = (x, y)$ con $y > 0$; allo stesso modo si dimostra che non possono esserci arbitraggi $h = (x, y)$ con $y < 0$ (esercizio). \square

Abbiamo visto che imporre l'assenza di arbitraggi dal nostro modello può portare a condizioni che devono essere soddisfatte già nel caso in cui non ci siano titoli derivati nel mercato. Vedremo presto che l'introduzione di titoli derivati fa sì che vengano introdotte nuove condizioni sui prezzi di questi titoli derivati.

1.3 Relazioni per arbitraggio

Il principio di non arbitraggio permette di ricavare delle relazioni che legano prezzi di titoli derivati fra di loro e ai corrispondenti prezzi del titolo principale: queste relazioni sono generali e devono valere indipendentemente dal modello che genera i prezzi. Le relazioni si basano tutte sul fatto che, se non fossero valide, allora si potrebbe costruire un portafoglio che, grazie alla non validità della relazione, permetterebbe di realizzare un arbitraggio. Il

prototipo per queste relazioni può essere visto nel fatto che un titolo derivato che al tempo N dà un prezzo non negativo (come ad esempio le call e le put) deve avere un prezzo non negativo ad ogni tempo $n < N$. In genere, perché queste relazioni siano valide, sul mercato si fanno le Ipotesi 1.3 insieme all'ulteriore ipotesi che per ogni maturità N di opzione, esista un cosiddetto **zero-coupon bond** con maturità N , cioè un titolo che permette di avere una unità monetaria al tempo N con certezza: esempi di (multipli di) questi titoli sul mercato italiano sono i BOT, che una volta comprati (ad un prezzo generalmente minore del loro valore nominale) non danno pagamenti intermedi ma solo un pagamento finale pari al loro valore nominale. Questi titoli saranno l'analogo del titolo senza rischio B .

Le relazioni che presentiamo riguardano tutte prezzi di call e put presi all'istante 0 (e quindi con prezzo del sottostante S_0 fissato) con diversi prezzi di esercizio K_1, \dots, K_m . Chiamiamo $C_n(N, K)$ (rispettivamente $P_n(N, K)$) il prezzo al tempo $n = 0, N$ di una call (risp., put) con maturità N e prezzo di esercizio $K (= K_1, \dots, K_m)$. Con questi titoli possiamo costruire un portafogli con più scelte di prima; in particolare possiamo comprare:

- x titoli senza rischio (zero-coupon bond) $B_n = B(n, N)$;
- y titoli rischiosi S_n ;
- z_i call $C_n(N, K_i)$, con $i = 1, \dots, m$;
- w_i put $P_n(N, K_i)$, con $i = 1, \dots, m$.

Il nostro portafogli sarà quindi determinato dal vettore $h = (x, y, z_1, \dots, z_m, w_1, \dots, w_m)$, e il valore del portafogli da

$$V_n = xB(n, N) + yS_n + \sum_{i=1}^m z_i C_n(N, K_i) + \sum_{i=1}^m w_i P_n(N, K_i), \quad n = 0, N$$

1.4 Parità call - put

Questa relazione lega prezzi di call e put ai corrispondenti prezzi del sottostante e prezzi di esercizio. Per ogni $K = K_1, \dots, K_m$ si ha

$$C_0(N, K) - P_0(N, K) = S_0 - KB(0, N)$$

Per dimostrare questa relazione, chiamata **parità call-put**, procediamo per assurdo. Definiamo

$$\delta := C_0(N, K) - P_0(N, K) - S_0 + KB(0, N)$$

Ora se $\delta = 0$ la relazione vale. Supponiamo invece che $\delta < 0$ e mostriamo che si può costruire un arbitraggio: poniamo difatti $h := (x, y, z, w)$ con

$$\begin{aligned} x &:= -\frac{\delta}{B(0, N)} + K, \\ y &:= -1, \\ z &:= 1, \\ w &:= -1, \end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
 V_0^h &= xB(0, N) + yS_0 + zC_0(N, K) + wP_0(N, K) = \\
 &= xB(0, N) - S_0 + C_0(N, K) - P_0(N, K) = \\
 &= xB(0, N) + \delta - KB(0, N) = 0, \\
 V_N^h &= xB(N, N) + yS_N + zC_N(N, K) + wP_N(N, K) = \\
 &= x \cdot 1 - S_N + C_N(N, K) - P_N(N, K)
 \end{aligned}$$

Per come sono definite le call e le put, abbiamo che

$$C_N(N, K) - P_N(N, K) = \begin{cases} S_N - K - 0 & \text{se } S_N \geq K, \\ 0 - K + S_N & \text{se } S_N \leq K, \end{cases}$$

(chiaramente le due espressioni sono nulle per $S_N = K$), e quindi $C_N(N, K) - P_N(N, K) = S_N - K$ (si può vedere una rappresentazione in Figura 1.6). Abbiamo quindi

$$V_N^h = -\frac{\delta}{B(0, N)} + K - S_N + S_N - K = -\frac{\delta}{B(0, N)} > 0$$

(ricordiamo infatti che $\delta < 0$), quindi h è un arbitraggio, il che va contro le ipotesi. Nel caso $\delta > 0$, è facile dimostrare che $-h$ (ossia il portafoglio costruito prendendo le posizioni opposte) è un arbitraggio.

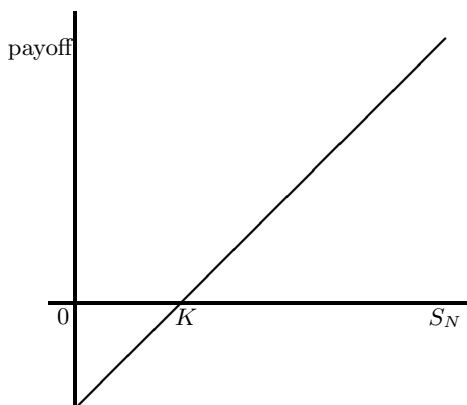


Figura 1.1: payoff $(S_N - K)^+ - (K - S_N)^+ = S_N - K$

Corollario 1.6 *Fissati $N > 0$ e $K = K_1, \dots, K_m$, il prezzo di una call deve soddisfare i seguenti vincoli:*

$$(S_0 - KB(0, N))^+ \leq C_0(N, K) \leq S_0$$

Dimostrazione. La prima disuguaglianza segue dalla parità call-put e dal fatto che $P_0(N, K) \geq 0$: infatti

$$C_0(N, K) = S_0 - KB(0, N) + P_0(N, K) \geq S_0 - KB(0, N)$$

Siccome $C_0(N, K) \geq 0$, abbiamo che $C_0(N, K) \geq \max(S_0 - KB(0, N), 0) = (S_0 - KB(0, N))^+$. La seconda disuguaglianza segue dal fatto che, se costruiamo il portafoglio costituito da (1 titolo primario S) - (1 call), allora questo portafoglio al tempo T darà il payoff $\max(S_0, K) \geq 0$, e quindi il suo prezzo dovrà essere maggiore di zero. \square

Corollario 1.7 *Fissati $N > 0$ e $K = K_1, \dots, K_m$, il prezzo di una put deve soddisfare i seguenti vincoli:*

$$(KB(0, N) - S_0)^+ \leq P_0(N, K) \leq KB(0, N)$$

Dimostrazione. La prima disuguaglianza segue dalla parità call-put e dal fatto che $C_0(N, K) \geq 0$ per ogni T, K : infatti

$$P_0(N, K) = KB(0, N) - S_0 + C_0(N, K) \geq KB(0, N) - S_0$$

e siccome $P_0(N, K) \geq 0$, abbiamo che $P_0(N, K) \geq \max(KB(0, N) - S_0, 0) = (KB(0, N) - S_0)^+$. La seconda disuguaglianza segue dal fatto che, se costruiamo il portafoglio costituito da (K zero-coupon bonds con maturità N) - (1 put), allora questo portafoglio al tempo T darà il payoff $\max(S_0, K) \geq 0$, e quindi il suo prezzo dovrà essere maggiore di zero. \square

1.5 Monotonia dei prezzi di call e put rispetto al prezzo di esercizio

Fissato N , i prezzi delle call e delle put sono funzioni monotone rispetto al prezzo di esercizio. In particolare, i prezzi delle call decrescono al crescere di K e i prezzi delle put crescono.

Per dimostrare questa relazione per le call, prendiamo $K_1 < K_2$ e costruiamo il portafoglio costituito da

1 call con prezzo di esercizio K_1 - 1 call con prezzo di esercizio K_2 .

Allora il suo payoff al tempo N sarà $(S_N - K_1)^+ - (S_N - K_2)^+ = \max(0, \min(S_N, K_2 - K_1))$, che é non negativo.

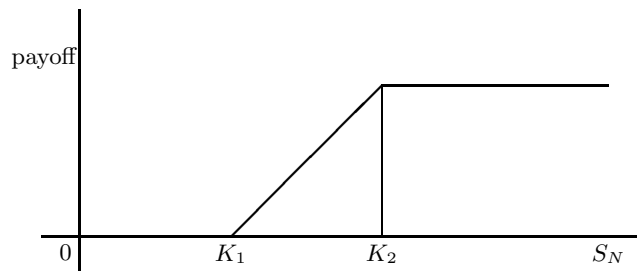


Figura 1.2: payoff $(S_N - K_1)^+ - (S_N - K_2)^+$

Per il principio di non arbitraggio, quindi, questo portafoglio deve avere prezzo non negativo, e questo implica che $C_0(N, K_1) \geq C_0(N, K_2)$.

Per dimostrare la relazione per le put, prendiamo $K_1 < K_2$ e costruiamo il portafoglio costituito da

1 put con prezzo di esercizio K_2 - 1 put con prezzo di esercizio K_1 .

Allora il suo payoff al tempo T sarà $(K_2 - S_N)^+ - (K_1 - S_N)^+ = \max(0, \min(K_1 - S_N, K_1 - K_2))$, che é non negativo.

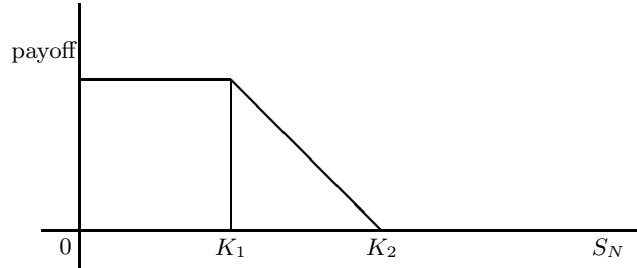


Figura 1.3: payoff $(K_2 - S_N)^+ - (K_1 - S_N)^+$

Ne segue che $P_0(N, K_2) \geq P_0(N, K_1)$.

1.6 Convessità dei prezzi di call e put rispetto al prezzo di esercizio

Fissato N , i prezzi delle call e delle put sono funzioni **convesse** rispetto al prezzo di esercizio: la definizione geometrica di questo concetto è per ogni $K_1 < K_3 < K_2$ si ha che $(K_3, C_0(N, K_3))$ nel piano cartesiano sta sotto al segmento di estremi $(K_1, C_0(N, K_1))$ e $(K_2, C_0(N, K_2))$.

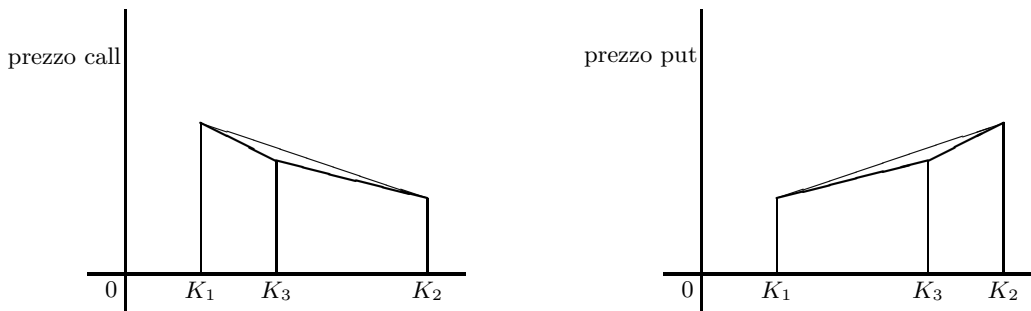


Figura 1.4: convessità di call e put rispetto a K

In termini di geometria analitica, se $K_3 \in (K_1, K_2)$ allora esiste un $\lambda \in (0, 1)$ (esplicitamente dato da $\lambda := \frac{K_3 - K_2}{K_1 - K_2}$) tale che $K_3 = \lambda K_1 + (1 - \lambda)K_2$. Si può allora verificare che il punto di ascissa K_3 che sta sul segmento di estremi $(K_1, C_0(N, K_1))$ e $(K_2, C_0(N, K_2))$ ha coordinate $(K_3, \lambda C_0(N, K_1) + (1 - \lambda)C_0(N, K_2))$; la definizione data sopra per le call si può quindi tradurre nella disuguaglianza

$$C_0(N, K_3) = C_0(N, \lambda K_1 + (1 - \lambda)K_2) \leq C_0(N, K_1) + (1 - \lambda)C_0(N, K_2)$$

e per le put

$$P_0(N, K_3) = P_0(N, \lambda K_1 + (1 - \lambda)K_2) \leq P_0(N, K_1) + (1 - \lambda)P_0(N, K_2)$$

Per dimostrare questa relazione per le call, prendiamo $K_1 < K_3 < K_2$: allora esiste un unico $\lambda \in (0, 1)$ tale che $K_3 = \lambda K_1 + (1 - \lambda)K_2$ (esplicitamente, $\lambda := \frac{K_2 - K_3}{K_2 - K_1}$). Costruiamo poi il portafoglio costituito da

λ call con prezzo di esercizio K_1 + $(1 - \lambda)$ call con prezzo di esercizio K_2
 -1 call con prezzo di esercizio K_3 .

Allora il suo payoff al tempo T sarà $\lambda(S_0 - K_1)^+ + (1 - \lambda)(S_0 - K_2)^+ - (S_0 - K_3)^+$, che è non negativo: in particolare, è strettamente positivo per $K_1 < S_0 < K_2$ e nullo altrimenti.

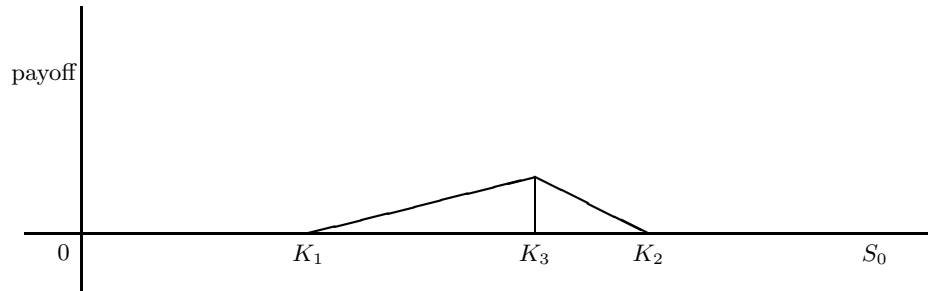


Figura 1.5: payoff $\lambda(S_N - K_1)^+ + (1 - \lambda)(S_N - K_2)^+ - (S_N - K_3)^+$

Per il principio di non arbitraggio, quindi, questo portafoglio deve avere prezzo non negativo, e questo implica che $\lambda C_t(T, K_1) + (1 - \lambda)C_t(T, K_2) \geq C_t(T, K_3) = C_t(T, \lambda K_1 + (1 - \lambda)K_2)$. In particolare, se la legge di S_N ha supporto non limitato su \mathbb{R}^+ (cioè se $\mathbb{P}\{S_N \in (a, b)\} > 0$ per ogni $0 < a < b$), allora il prezzo deve essere positivo, e quindi $\lambda C_t(T, K_1) + (1 - \lambda)C_t(T, K_2) > C_t(T, K_3) = C_t(T, \lambda K_1 + (1 - \lambda)K_2)$, cioè la funzione $K \rightarrow C_0(N, K)$ è strettamente convessa.

Per dimostrare la relazione per le put, si procede esattamente come sopra.

1.7 Esercitazione

Scaricare prezzi di opzioni con diverso strike e tracciare su un foglio OpenOffice un grafico per controllare monotonia e convessità.

Più in dettaglio:

- collegarsi al sito `finance.yahoo.com` (o altri siti con quotazioni on-line);
- digitare il nome di un titolo (es. Microsoft) nella maschera in alto a sinistra e premere il pulsante `get quotes`;
- nella spalla sinistra cliccare su `Options`;
- aprire un foglio di calcolo su OpenOffice e riportare nella prima colonna gli strike che si incontrano (dovrebbero essere da 24 a 34 sia per call che per put);
- nella seconda e terza colonna rispettivamente riportare i prezzi di call e put che appaiono nelle colonne `last`;
- nella quarta colonna verificare che ci sia la parità call-put;
- fare un grafico con le prime 3 colonne tracciando le funzioni $K \rightarrow C_0(N, K)$ e $K \rightarrow P_0(N, K)$; verificare che sono monotone e convesse.